Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 2 Junio 2016

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot sen(x) + x\cdot\cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite (ln denota logaritmo neperiano).

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot sen(x) + x\cdot\cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite (ln denota logaritmo neperiano).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot sen(x) + x\cdot\cos(3x)}{x^2} = \frac{\ln(1) - a\cdot sen(0) + 0\cdot\cos(0)}{0} = 0/0.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\cdot sen(x) + x\cdot\cos(3x)}{x^2} = (0/0;L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cdot\cos(x) + \cos(3x) + x\cdot(-sen(3x))\cdot 3}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cdot\cos(x) + \cos(3x) - 3x\cdot sen(3x)}{2x} = \frac{\frac{1}{0+1} - a\cdot\cos(0) + \cos(0) - 0\cdot sen(0)}{0} =$$

$$= \frac{1 - a\cdot 1 + 1 - 0}{0} = \frac{2-a}{0}.$$

Como me dicen que el límite es finito, **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital puesto que el límite es un número, es decir 2 - a = 0, de donde **a = 2**.
Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con a = 2, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 2\cdot\cos(x) + \cos(3x) - 3x\cdot sen(3x)}{2x} = (0/0;L'H) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} - 2\cdot(-sen(x)) - sen(3x)\cdot 3 - \left(3\cdot sen(3x) + 3x\cdot\cos(3x)\cdot 3\right)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{(1)^2} - 2\cdot(-sen(0)) - sen(0)\cdot 3 - \left(3\cdot sen(0) + 0\cdot\cos(0)\cdot 3\right)}{2} = \frac{-1 + 0 - 0 - (0+0)}{2} = -1/2.$$

Resumiendo **el valor de a es 2** y **el valor del límite es -1/2**.

Ejercicio 2 opción A, modelo 2 Junio 2016

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en el punto de abscisa x = 1 sabiendo que f(0) = 0 y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para x > - 1.

Solución

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en el punto de abscisa x = 1 sabiendo que f(0) = 0 y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para x > - 1

Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral que f(x) = ∫ f '(x)dx.

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1 es *y – f(1) = f '(1)·(x – 1).*

De $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, tenemos $\mathbf{f'(1) = \frac{(1-1)^2}{1+1} = 0}$.

Nos falta determina f(1) para lo cual primero tenemos que calcular f(x) = ∫ f '(x)dx, con f(0) = 0

Empezamos: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{(x-1)^2}{x+1}dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1}dx$.

Observamos que es una integral racional con el numerador de grado mayor o igual que el denominador, por tanto antes hay re realizar la división entera.

La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{rl} x^2 - 2x + 1 & \underline{|\; x + 1} \\ \underline{-x^2 - x \quad} & x - 3 \\ -3x + 1 & \\ \underline{3x + 3} & \\ 4 & \end{array}$$

Recordamos que f(x) = $\int\left(\text{Cociente} + \dfrac{\text{Resto}}{\text{divisor}}\right)dx = \int\left(x - 3 + \dfrac{4}{x+1}\right)dx = x^2/2 - 3x + 4\cdot\ln|x + 1| + K$, donde ln es el logaritmo neperiano.

Como f(0) = 0, tenemos $0^2/2 - 0 + 4\cdot\ln|0 + 1| + K = 0$, es decir $0 + \ln(1) + K = 0$, de donde K = 0.

La función es $f(x) = x^2/2 - 3x + 4\cdot\ln|x + 1|$, y $\mathbf{f(1) =} 1^2/2 - 3(1) + 4\cdot\ln|1 + 1| \mathbf{= -5/2 + 4\cdot\ln(2).}$

La recta tangente pedida es: $y - (-5/2 + 4\cdot\ln(2)) = 0\cdot(x - 1)$, es decir $\mathbf{y = -5/2 + 4\cdot\ln(2).}$

Ejercicio 3 opción A, modelo 2 Junio 2016

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) [1’75 puntos] Halla la matriz X que verifica AX + B = 2A.

(a) [0’75 puntos] Calcula B^2 y B^{2016}.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

(a)

Halla la matriz X que verifica AX + B = 2A.

Como det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l}\text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila}\end{array}$ $= 1(-1 + 2) = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

De AX + B = 2A, tenemos AX = 2A - B. Multiplicando ambos miembros por la izquierda por A^{-1} tenemos:

$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot 2A - A^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X = 2\cdot I - A^{-1}\cdot B \rightarrow$ $\mathbf{X = 2\cdot I - A^{-1}\cdot B}$.

Calculamos $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. |A| = 1; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz es $\mathbf{X = 2\cdot I - A^{-1}\cdot B =} 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 & 9 & 5 \\ -8 & 7 & 4 \\ -6 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a)

Calcula B^2 y B^{2016}.

$$\mathbf{B^2} = B\cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{= I_3}.$$

$\mathbf{B^{2016} =} (B^2)^{1008} = (I_3)^{1008} \mathbf{= I_3}.$

Ejercicio 4 opción A, modelo 2 Junio 2016

Considera el punto P(1,0,5) y la recta "r" dada por $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

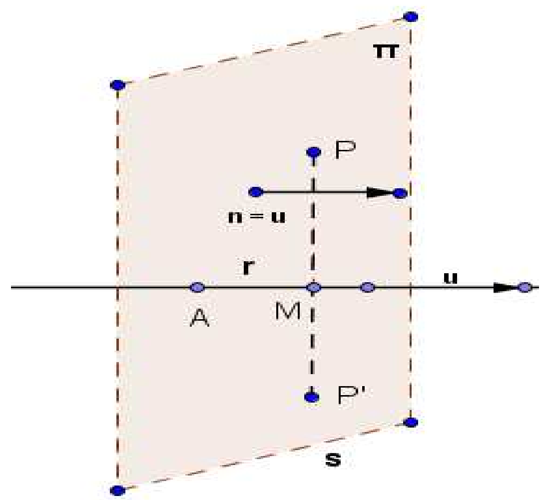
(a) [1 punto] Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a "r".
(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia de P a la recta "r" y el punto simétrico de P respecto a "r".

Solución

Considera el punto P(1,0,5) y la recta "r" dada por $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

(a)
Determina la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a "r".

Preparamos una figura para los dos apartados:



Ponemos la recta "r" $\equiv \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ en paramétricas "r" $\equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -2a \\ z = a \end{cases}$, con $a \in R$.

Un punto de la recta es el A(1,0,0) y un vector director es **u** = (0,-2,1).

El plano π que pasa por el punto P(1,0,5) y es perpendicular a la recta "r", tiene por vector normal **n**, el vector director de la recta, el **u** = **n** = (0,-2,1).
El plano π tiene de ecuación **PX•n** = 0, donde X(x,y,z) es un punto genérico del plano y • es el producto escalar de dos vectores:
$\pi \equiv$ **PX•n** = 0 = (x - 1,y - 0,z - 5) •(0,-2,1) = -2y + z - 5 **= -2y + z - 5 = 0.**
(b)
Calcula la distancia de P a la recta "r" y el punto simétrico de P respecto a "r".

Empezamos calculando el simétrico P' de P respecto de r. Cuando calculemos el punto M proyección ortogonal de P sobre "r", por definición la distancia de P a "r" será el módulo del vector **PM**.

Antes hemos puesto la recta "r" en paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2a \\ z = a \end{cases}$, con $a \in R$.

Un punto genérico de la recta es X(x,y,z) = (1,-2a,a).
En el apartado (a) hemos calculado plano que pasa por P y es perpendicular a "r".
La proyección M de P sobre "r", se obtiene como el punto de corte M del plano "π" con la recta "r". Sustituyendo el punto genérico de la recta "r" en el plano $\pi \equiv$ -2y + z - 5 = 0, calculando el valor del parámetro "a" y sustituyendo de nuevo en la recta.

-2(-2a) + (a) - 5 = 0 $\rightarrow$ 5a - 5 = 0 $\rightarrow$ a = 5/5 = 1.
El punto M es M(1,-2(1),(1)) = M(1,-2,1). (Recuerdo que teníamos punto P(1,0,5))

La distancia de P a "r" será el módulo del vector **PM** = (1 - 1, -2 - 0,1 - 5) = (0,-2,-4).
Luego **d(P;r)** = || **PM** || = $\sqrt{(0^2+2^2+4^2)}$ u^1 = $\boldsymbol{\sqrt{(20)}\ u^1 = 2\sqrt{(5)}\ u^1}$**.**

El punto simétrico P'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto M es el punto medio del segmento PP'.
(1,-2,1) = ((x+1)/2,(y+0)/2,(z+5)/2), de donde:
1 = (x+1)/2 $\rightarrow$ x = 1.
-2 = y/2 $\rightarrow$ y = -4.
1 = (z+5)/2 $\rightarrow$ z = -3.
El simétrico P' de P respecto a la recta "r" es P'(1,-4,-3).

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 2 Junio 2016

Sea f: R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de *f*.
b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de *f*.

Solución

Sea f: R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de *f*.

Como el denominador no se anula nunca, y tenemos un cociente de polinomios, f(x) **no tiene asíntotas verticales.**

Sabemos que en un cociente de polinomios si el grado del denominador es mayor que el del numerador tenemos una asíntota horizontal, y es la misma en $\pm\infty$.

De $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ = 1/+∞ = 0, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal ±∞.**
Como hay asíntota horizontal en ±∞, **no hay asíntotas oblicuas en ±∞.**

Como $\lim_{x\to-\infty}$ (f(x) – 0) = 0^-, la *gráfica de f está por debajo de la recta y = 0* en -∞.
Como $\lim_{x\to+\infty}$ (f(x) – 0) = 0^+, la *gráfica de f está por encima de la recta y = 0* en +∞.

Veamos los corte de la gráfica de f con la recta y = 0.
Igualando $\dfrac{x}{x^2+1}$ = 0, de donde x = 0, luego **la gráfica de f corta a la asíntota horizontal y = 0 en el punto (0,f(0)) = (0,0).**

b)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.

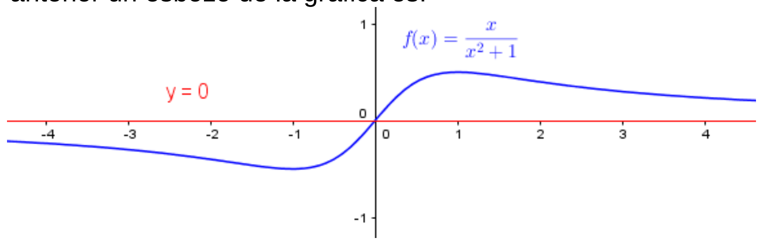
Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)
$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.
De f'(x) = 0, tenemos $-x^2 + 1 = 0$, es decir $x^2 = 1$ y las soluciones son x = ± 1, que serán los posibles extremos relativos.
Como $f'(-2) = \dfrac{-(-2)^2+1}{((-2)^2+1)^2} = \dfrac{-3}{25} < 0 <$ 0, *f es estrictamente decreciente* (↘) *en (-∞,-1).*
Como $f'(0) = \dfrac{0+1}{(0+1)^2} = 1 > 0 <$ 0, *f es estrictamente creciente* (↗) *en (-1,1).*
Como $f'(2) = \dfrac{-(2)^2+1}{((2)^2+1)^2} = \dfrac{-3}{25} < 0 <$ 0, *f es estrictamente decreciente* (↘) *en (1,+∞).*

Por definición $x = -1$ *es un mínimo relativo* y vale $f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2 + 1} = -1/2$.

Por definición $x = 1$ *es un máximo relativo y vale* $f(1) = \dfrac{1}{(1)^2 + 1} = 1/2$.

c)
Esboza la gráfica de *f*.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



Ejercicio 2 opción B, modelo 2 Junio 2016

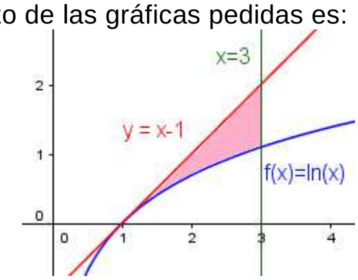
Sea f: $(0,+\infty) \rightarrow R$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ (ln representa logaritmo neperiano).
(a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1.
(b) [2 puntos] Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta y = x - 1 y la recta x = 3. Calcula su área.

Solución

Sea f: $(0,+\infty) \rightarrow R$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ (ln representa logaritmo neperiano).
(a)
Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1.

Recta tangente en x = 1 es $y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$
$f(x) = \ln(x)$; luego $f(1) = \ln(1) = 0$.
$f'(x) = 1/x$, luego $f'(1) = 1/1 = 1$.
La recta tangente pedida es $y - 0 = 1\cdot(x - 1)$, luego **la recta tangente pedida es y = x - 1**.
(b)
Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta y = x - 1 y la recta x = 3. Calcula su área.

Sabemos que la gráfica de ln(x) es estrictamente creciente y que en $x = 0^+$ es asíntota vertical, porque $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty$, y además $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = \ln(+\infty) = +\infty$.
También sabemos que ln(1) = 0, ln(e) = 1.
La recta y = x - 1, la dibujamos con dos puntos, el (0,-1) y el (1,0). La recta x = 3 es una recta vertical. Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas pedidas es:



Lo relleno de color, es el área que piden.

Recordamos que $\int$ **ln(x)dx = x·ln(x) - x**, pues es una integral por partes ($\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$).
$\int \ln(x)dx = \{ u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x;\ dv = x \rightarrow v = \int dx = x \} = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot dx/x = x\cdot\ln(x) - \int dx = x\cdot\ln(x) - x$.

Área = $\int_1^3 (x - 1 - \ln(x))dx = [x^2/2 - x - x\cdot\ln(x) + x]_1^3 = [x^2/2 - x\cdot\ln(x)]_1^3 =$
$= [(3^2/2 - 3\cdot\ln(3)) - (1^2/2 - 1\cdot\ln(1))] = 9/2 - 1/2 - 3\cdot\ln(3)$ **= 4 - 3·ln(3) $u^2 \cong$ 0'70416 u^2.**

Ejercicio 3 opción B, modelo 2 Junio 2016

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{cases}$,

a) [1'5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro α.
b) [1 punto] Resuélvelo para α = 1 y determina en dicho caso, si existe alguna solución donde x = 4.

Solución

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{cases}$,

a)
Discútelo según los valores del parámetro α.

Observamos que es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{pmatrix}$.

La matriz cuadrada de 3x3 es la ampliada A*.
Si det(A*) = |A*| ≠ 0, rango(A^*) = 3 ≠ rango(A), pues como máximo rango(A) = 2. El sistema será incompatible.

$|A^*| = \begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (3\alpha-1)(\alpha+5-6) - (2)(\alpha^2+5\alpha-6\alpha) + (5-\alpha)(3\alpha-3\alpha) =$

$= (3\alpha-1)(\alpha-1) - (2)\cdot\alpha\cdot(\alpha-1) + (5-\alpha)(0) = (\alpha-1)\cdot(3\alpha-1-2\alpha) = (\alpha-1)\cdot(\alpha-1)$

De |A*| = 0, tenemos (α-1)·(α-1) = 0 y la solución es α = 1 (doble).

Si **α ≠ 1**, det(A*) = |A*| ≠ 0, rango(A^*) = 3 ≠ rango(A), pues como máximo rango(A) = 2. **El sistema será incompatible.**

En $A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}$ vemos que la segunda y tercera fila son proporcionales. Podemos suprimir la tercera e intercambiamos segunda con primera.

$A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3-3F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1-3F_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observamos que **si α = 1**, las dos filas son proporcionales y **rango (A) = 1.**
Veamos el rango(A) para α = 1.*

Si **α = 1**, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1-2F_2 \\ \\ F_3-3F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego **rango (A*) = 1**, pues tenemos una fila solamente con números distinto de cero.

Resumiendo:
Si **α ≠ 1**, det(A*) = |A*| ≠ 0, rango(A^*) = 3 ≠ rango(A), pues como máximo rango(A) = 2. **El sistema será incompatible.**

Si **α = 1**, rango(A) = rango(A^*) = 1 < nº de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)
Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe alguna solución donde x = 4.

Hemos visto en el apartado anterior que si **α = 1**, rango(A) = rango(A^*) = 1 < nº de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 1, sólo necesitamos una ecuación. Tomo la segunda:

x + y = 2. Tomo **x = a** $\in$ R, de donde **y = 2 – a**. (Es la ecuación de una recta en el plano)

Solución (x,y) = (a, 2 – a) con a $\in$ R.
Si tomamos **x = 4** = a, tenemos y = 2 4 = -2. **Solución (x,y) = (4,-2).**

Ejercicio 4 opción B, modelo 2 Junio 2016

Considera las rectas “r” y “s” dadas por: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

(a) [1’5 puntos] Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
(b) [1 punto] Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas “r” y “s”, calcula su área.

Solución

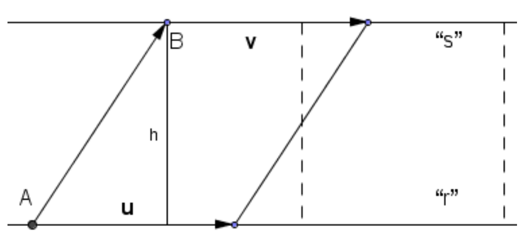
Considera las rectas “r” y “s” dadas por: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

(a)
Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

Ponemos la recta “s” $\equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$ en paramétricas “s” $\equiv \begin{cases} x = -1 - 2b \\ y = b \\ z = -1 \end{cases}$, con b $\in$ R.

De la recta “r” tenemos el punto A(1,1,1) y un vector director **u** = (-2,1,0).
De la recta “s” tenemos el punto B(-1,0,-1) y un vector director **v** = (-2,1,0).

Sabemos que dos rectas determinan un plano si son paralelas y distintas o bien si se cortan en un punto.
En nuestro caso vemos que los vectores **u** y **v** son iguales, por tanto son paralelas. Para ver que son distintas vemos que el vector **u** no es proporcional al vector **AB**.
AB = (-2,-1,-2). Como -2/-2 $\neq$ 1/-1, **u** no es proporcional al vector **AB** y las rectas “r” y “s” son paralelas y distintas.



Me piden el plano π que determinan las rectas “r” y “s”. De la recta “r” tomo el punto A(1,1,1) y su vector director **u** = (-2,1,0). El otro vector es el **AB** = (-2,-1,-2).

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{u},\mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-1)(-2-0) - (y-1)(4-0) + (z-1)(2+2) =$$

= -2x + 2 - 4y + 4 + 4z - 4 **= -2x - 4y + 4z + 2 = 0 = -x - 2y + 2z + 1 = 0**
(b)
Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas “r” y “s”, calcula su área.

Si observamos la figura el lado del cuadrado es la distancia entre las rectas y su área es el lado al cuadrado.

Como ya sabemos que las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo. *Es la altura del paralelogramo*. Nos sirve la figura anterior.

Dada la recta "r" conocemos el punto A(1,1,1) y su vector director **u** = (-2,1,0). De la recta "s" sólo tomamos el punto B(-1,0,-1).
El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AB** es ||**AB**x**u**|| = base·altura = ||**u**||·h, pero la altura "h" es d(s,r) = d(B;r), luego d(B;r) = (||**AB**x**u**||) / (||**u**||)

AB = (-2,-1,-2); **uxAB** = $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ = **i**(-2-0) - **j**(4-0) + **k**(2+2) = (-2,-4,4); ||**uxAB**|| = $\sqrt{(2^2+4^2+4^2)} = \sqrt{(36)} = 6$

||**u**|| = $\sqrt{(2^2+1^2+0^2)} = \sqrt{(5)}$
Luego d(s,r) = d(B;r) = (||ACxu||) / (||u||) = $6/\sqrt{(5)}$ u^1.
El área del cuadrado es $[6/\sqrt{(5)}]^2 = 36/5$ u^2.